TD Intégration

Inégalités

T1H **Exercice 1** Soit f continue sur $[0,\pi]$ telle que $\int_0^\pi f(t)^2 \sin t \,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle.

7FZ **Exercice 2** Soit f continue sur $[0,1]$.

1. On suppose que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer qu'il existe $u \in]0,1[$ tel que f s'annule en u.
2. On suppose que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois.

MBL **Exercice 3** Soit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbb{C}[X]$. On note $M = \sup\limits_{z\in\mathbb{U}} |P(z)|$.

1. Justifier l'existence de M.
2. En considérant, pour $p \in [\![0,n]\!]$, la quantité $I_p = \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta})e^{-ip\theta}\,\mathrm{d}\theta$, montrer que $\max\limits_{i\in[\![0,n]\!]} |a_i| \leq M$.
3. Que vaut $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$?

VDJ **Exercice 4** Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$. Montrer que f est de signe constant sur $[a,b]$.

OZC **Exercice 5** Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. On suppose que $\|f'\|_\infty \leq 1$.
   a) Montrer que $f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$.
   b) Peut-on avoir égalité ?
2. On suppose que $\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = 1$.
   a) Montrer que $f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$.
   b) Peut-on avoir égalité ?

RWK **Exercice 6** Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On veut montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(0) + \frac{1}{2}f'(c)$.

1. Justifier que l'on peut supposer $f(0) = 0$.
2. À l'aide d'une IPP, montrer le résultat.

Limites diverses

FLO **Exercice 7** Déterminer les limites, quand $n \to +\infty$.

1. $\int_0^1 e^{1+(\frac{x}{2})^n}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1 e^{x^n} dx$

14U **Exercice 8**

1. Limite, quand $t \to 1$, de $\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t}$.
2. Limite, quand $x \to 1^+$, de $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. **Ind** : *Considérer* $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$.

3GW **Exercice 9** Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, positive, strictement croissante telle que $f(1) = 1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^n\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Indication : *Il faut utiliser des ε, et découper l'intégrale.*

GY4 **Exercice 10** Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue et $y = (y_1,\ldots,y_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$. Pour $\alpha > 0$, on définit

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^1 f(t)^\alpha\right)^{1/\alpha} \quad \text{et} \quad \|y\|_\alpha = \left(\sum_{k=1}^p y_i^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

1. À l'aide d'un encadrement, montrer que $\|y\|_\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} \max y_i$.
2. Montrer que $\|f\|_\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} \sup f$. **Ind** : *Le sup est atteint en x_0, considérer $\varepsilon > 0$.*
3. Déterminer un équivalent, quand $\alpha \to 0^+$, de $\|y\|_\alpha$.
4. ★ Montrer que $\|f\|_\alpha \xrightarrow[\alpha\to0^+]{} \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)$. **Ind** : *Chercher à utiliser (une généralisation de) la question précédente.*

JOX **Exercice 11** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} k$. Montrer que $g\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

E87 **Exercice 12** Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Sommes de Riemann

23F **Exercice 13** Déterminer la limite éventuelle de

1. $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n \sin\frac{k\pi}{n}\right)$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3}{n^4}$
3. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$
4. $\left(\prod_{k=1}^n (1+\frac{k}{n})\right)^{1/n}$

WQS **Exercice 14**

1. Montrer que $\forall x \neq \pm1, \forall\theta \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x\cos\theta + 1 > 0$.
2. Montrer que, pour $x \neq \pm1$, $$\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)\right).$$
3. En considérant $P_n(X) = \prod\limits_{k=1}^n \left(1 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + X^2\right)$, calculer l'intégrale précédente.
4. ★ Soient $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{C}$ de modules < 1. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que le produit des distances de z aux a_i vaille 1.

977 **Exercice 15** Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer la limite de $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)$.

Indication : *Commencer par trouver la limite d'une somme légèrement différente.*

GIQ **Exercice 16** Inégalité de Jensen Soit g une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et φ une fonction continue convexe, montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(g(u))\,\mathrm{d}u$$

SAS **Exercice 17** ★ [Mines 2021] Convergence de

1. $v_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^3}\right)$.
2. $u_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

O2U **Exercice 18** ★ Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $n \geq 1$, on pose $M_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que $M_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. En utilisant l'uniforme continuité de f', montrer que le résultat reste vrai si f est seulement de classe $\mathcal{C}^1$.

Approximations uniformes

3UR **Exercice 19** Soit f continue sur $[a,b]$. D'après le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales P_n sur $[a,b]$ telles que $\|f-P_n\|_\infty \to 0$.

1. Montrer qu'il existe une suite polynomiale (Q_n) tel que $\|f-Q_n\|_\infty \to 0$ et $\forall n,\ f(a) = Q_n(a)$.
2. Soit $x_1,\dots,x_p \in [a,b]$. Montrer que l'on peut imposer $\forall i,\ f(x_i) = Q_n(x_i)$.

ALO **Exercice 20** ♣ Lemme de Riemann-Lebesgue Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. On veut montrer que pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b])$,

$$\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad (*)$$

1. Établir $(*)$ pour une fonction indicatrice $f = \mathbb{1}_{[c,d]}$, où $[c,d] \subset [a,b]$. En déduire $(*)$ pour toute fonction en escalier.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b])$. En considérant une suite (φ_n) de fonctions en escalier telles que $\|f-\varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, établir $(*)$.

NSG **Exercice 21** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $0 \leq k < n$. Montrer que f s'annule en au moins n points distincts. Que dire de f lorsque l'hypothèse est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$?

9BN **Exercice 22** ★ Critère d'équidistribution Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Montrer l'équivalence entre

(i) Pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, $\frac{1}{n}\operatorname{Card}\{1 \leq k \leq n,\ u_k \in [a,b]\} \to b-a$

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}),\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

Calculs divers

YMH **Exercice 23** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$, on a $\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{t}\right)\mathrm{d}t \leq n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que n est la meilleure constante possible.

ETZ **Exercice 24**

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. On pose $f_p(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^p}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f_p(x) = O_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^{p-1}}\right)$.
2. À l'aide d'intégrations par parties, déterminer un équivalent de $f_p(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

5CE **Exercice 25** Calculer $I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{e^{1/x}+1}\,\mathrm{d}x$. **Ind** : *Ne pas chercher un changement de variable compliqué. Utiliser une forme de symétrie.*

QQU **Exercice 26** Trouver un équivalent, quand $n \to +\infty$, de $\int_0^1 (\ln(1+x))^n\,\mathrm{d}x$.

★ Optimisation fonctionnelle

PHF **Exercice 27** Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.
Indication : *Procéder par l'absurde, et considérer $f(1/2)$.*

V75 **Exercice 28** Soit $E = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in E$ et tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x)^2 - f(a)^2| \leq C\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

HC5 **Exercice 29** [Mines] Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $f \in E$, on a $\int_0^1 |f'-f| \geq e^{-1}$. La constante e^{-1} est-elle optimale ?

ZXS **Exercice 30** [X 2022] Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \int_0^1 f = 0\right\}$. Pour $f \in E$, on pose

$$\Phi(f)\colon x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour $f \in E$, montrer que $\Phi(f) \in E$.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall f \in E,\ \|\Phi_f\|_\infty \leq C\,\|f\|_\infty$.
3. Montrer que $C \geq \frac{1}{4}$. Déterminer la constante C optimale.

XGR **Exercice 31** ★ Minimum de $\int_0^1 f''(t)^2\,\mathrm{d}t$, parmi les fonctions $\mathcal{C}^2$, vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a$.